C. N. I. “Grigore Moisil” Braşov
Catedra de FIZICĂ
Prof. Titu Mastan

SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT / MARTIE 2015

Proba Ed) - Filiera teoretică – profilul real, Filiera vocaţională – profilul militar

REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE, CU VARIANTE, CU EXPLICAȚII ȘI CU COMENTARII

Autor: Prof. Titu Mastan

MECANICĂ - Subiectul I

Precizare:

la itemii de la acest subiect candidații trebuie să dea răspunsurile în formatul solicitat de enunțuri, adică direct, foarte scurt.

În acest material, se prezintă, în plus, și rezolvările, în unele cazuri cu variante, în scopul pregătirii sistematice a elevilor și al dezvoltării capacităților de deducere fundamentată a acestor răspunsuri.

I.1. La acest tip de item, propun următoarea metodă de rezolvare, pas-cu-pas, folosind unitățile SI și implicit dimensiunile mărimilor fizice:

$$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{m}{s} = [M] \cdot [a] \cdot [v] = [F \cdot v] = [P].$$

Rezultatul corect: d. puterea mecanică

I.2. Se aplică principiul II al mecanicii, sub forma

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

De unde rezultă că direcția și sensul rezultantei forțelor **sunt aceleași cu direcția și sensul accelerației momentane.**

Rezultatul corect: d. accelerația momentană

I.3. Din reprezentarea grafică rezultă că viteza crește liniar cu timpul (chiar direct proporțional). De aici deducem că avem o mișcare rectilinie uniform accelerată, plecând din repaus (fără viteză inițială, $v_0 = 0m \cdot s^{-1}$) în care se obține viteza maximă a căderii corpului, $v_{\max} = 16m \cdot s^{-1}$.

Din grafic se determină

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} = 10m \cdot s^{-2} = g.$$

Pentru determinarea spațiului parcurs de corp (implicit h) se poate merge pe diferite variante:

Varianta 1. Folosind legile căderii libere

$$S = h_{max} = \frac{a(\Delta t)^2}{2} = \frac{g(\Delta t)^2}{2} = 12{,}8m.$$

Varianta 2. Folosind legea spațiului din mișcarea rectilinie și valoarea medie a unei funcții liniare

$$S = h_{max} = v_m \cdot \Delta t = \frac{v_0 + v_{max}}{2} \cdot \Delta t = 12{,}8m.$$

Varianta 3. Folosind graficul dat, al funcției $v = f(t)$, și semnificația fizică a ariei conținute sub graficul funcției (aria unui triunghi dreptunghic)

$$S = h_{max} = \int_0^{1{,}6} v(t)dt = A = 12{,}8m.$$

Rezultatul corect: b. 12.8 m

I.4. La acest item, se cere, cu alte cuvinte, lucrul mecanic al forței deformatoare. Aceasta este o forță motoare, deci va avea un lucru mecanic pozitiv. În contextul unei deformări cvasistatice, avem

$$L(\vec{F}) = \vec{F}_m \cdot \vec{d} = \int_0^x F(x)dx = \frac{kx^2}{2} > 0.$$

***Comentariu**: Atenție foarte mare la cerințe. În unele variante de subiecte se cere lucrul mecanic al forței elastice. În acest caz itemul se rezolvă astfel*

$$L(\vec{F}_e) = \vec{F}_{em} \cdot \vec{d} = \int_0^x \vec{F}_e(x) d\vec{x} = -\frac{kx^2}{2} < 0$$

Rezultatul corect: **c.** $\frac{kx^2}{2}$

I.5. Aici se prezintă o mișcare rectilinie uniformă, pe verticală, în sus. Trebuie deci ca muncitorul să acționeze cu o forță de ridicare egală și de sens contrar cu greutatea corpului

$$F = G = mg = const\,.$$

Muncitorul efectuează un lucru mecanic și dezvoltă o putere mecanică

$$P = \frac{L(\vec{F})}{\Delta t} = \frac{F \cdot h}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t},\quad P = 100W = 0{,}1kW\,.$$

Rezultatul corect: **d.** 0,1kW

MECANICĂ - Subiectul II

În această problemă

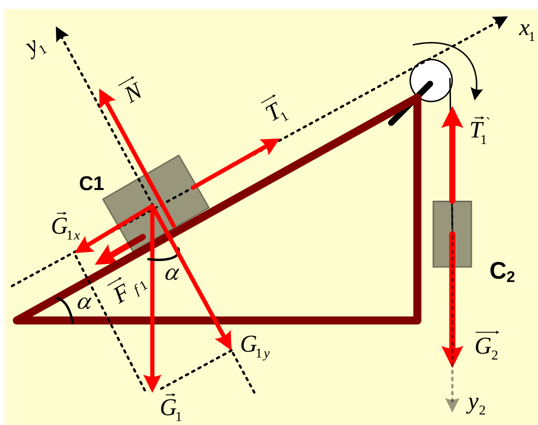
se dau:
$$M = 200g = 0{,}2kg$$
$$m = 100g = 0{,}1kg$$
$$m_1 = 100g = 0{,}1kg$$
$$m_2 = 20g = 0{,}02kg$$

și, se cer:
$$a.\ \frac{T_2}{T_1} = ?$$
$$b.\ \sin a = ?$$
$$c.\ \mu = ?$$
$$d.\ a = a_3 = ?$$

Enunțul prezintă trei cazuri. Putem realiza o rezolvare algoritmică în cadrul căreia studiem cazurile separat și în fiecare caz, corpurile separate. În final, constituim un sistem de ecuații util pentru rezolvare. Studiind datele și cerințele problemei putem observa că pentru cerințele a, b, c, este suficientă analiza primelor două cazuri, singurele relevante pentru aceste cerințe.

Pentru simplitatea exprimării vom nota corpul M cu C_1 și corpul m cu C_2.

Cazul 1. Urcarea uniformă a corpului C_1 pe planul înclinat și coborârea uniformă a corpului C_2, pe verticală. Desenul forțelor este redat mai jos



Întrucât avem un sistem legat, care se mișcă unitar, vom pune condițiile

$$T_1 = T_1^`,\quad a_1 = a_1^` = 0,\quad v_1 = v_1^`.$$

Aplicând principiul II al mecanicii, pentru fiecare corp, avem:

<u>Pentru corpul C_1</u>

$$\begin{cases} Ox: & \begin{cases} R_x = Ma_1 = 0 \\ R_x = T_1 - G_x - F_f \\ F_f = \mu N \end{cases} \\ Oy: & \begin{cases} R_{y1} = 0 \ (conditia\ de\ sprijinire) \\ R_{y1} = N - G_y \end{cases} \end{cases}.$$

Făcând înlocuiri, și o sinteză adecvată, obținem

$$T_1 = Mg(sin\alpha + \mu cos\alpha) \quad \textbf{(1).}$$

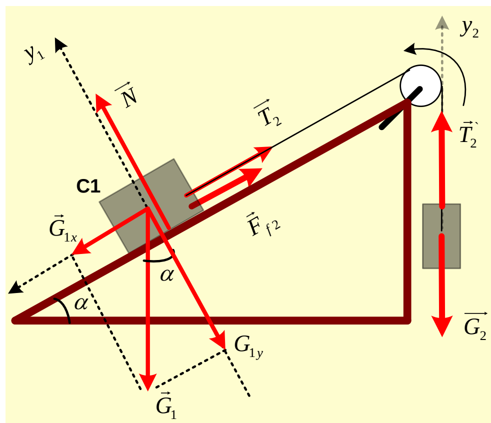
<u>Pentru corpul C$_2$</u>

$$\begin{cases} Oy_2: & \begin{cases} R_{y2} = 0 \ (conditia\ de\ miscare\ rectilinie\ si\ uniformă) \\ R_{y2} = G_2 - T_1 = (m + m_1)g - T_1 \end{cases} \end{cases}$$

Făcând înlocuiri, și o sinteză adecvată, obținem

$$T_1 = (m + m_1)g \quad \textbf{(2).}$$

Cazul 2. Coborârea uniformă a corpului C_1 pe planul înclinat și urcarea uniformă a corpului C_2, pe verticală. Desenul forțelor este redat mai jos



Aplicând principiul **II** al mecanicii, pentru fiecare corp, avem:

<u>Pentru corpul C$_1$</u>

$$\begin{cases} Ox: & \begin{cases} R_x = Ma_2 = 0 \\ R_x = G_x - T_2 - F_f \\ F_f = \mu N \end{cases} \\ Oy: & \begin{cases} R_{y1} = 0 \ (conditia\ de\ sprijinire) \\ R_{y1} = N - G_y \end{cases} \end{cases}.$$

Făcând înlocuiri, și o sinteză adecvată, obținem

$$T_2 = Mg(sin\alpha - \mu cos\alpha) \quad \textbf{(3).}$$

<u>Pentru corpul C$_2$</u>

$$\begin{cases} Oy_2: & \begin{cases} R_{y2} = 0 \ (conditia\ de\ miscare\ rectilinie\ si\ uniformă) \\ R_{y2} = T_2 - G_2 = T_2 - (m + m_2)g \end{cases} \end{cases}$$

Făcând înlocuiri, și o sinteză adecvată, obținem

$$T_2 = (m + m_2)g \quad (4).$$

Formăm acum sistemul de ecuații care exprimă sintetic stările descrise ale sistemului

$$\begin{cases} T_1 = Mg(sin\alpha + \mu cos\alpha) \\ T_1 = (m+m_1)g \\ T_2 = Mg(sin\alpha - \mu cos\alpha) \\ T_2 = (m+m_2)g \end{cases}.$$

După această analiză globală a cazurilor 1 și 2 putem face foarte ușor rezolvarea cerințelor punctuale astfel:

a. $\frac{T_2}{T_1} = ?$. Se folosesc relațiile (2) și (4) și rezultă

$$\begin{cases} T_1 = (m+m_1)g \\ T_2 = (m+m_2)g \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{(m+m_2)g}{(m+m_1)g} = \frac{m+m_2}{m+m_1} \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{0,1+0,02}{0,1+0,1} = 0,6 \end{cases}$$

b. $sin\alpha = ?$. Se folosesc relațiile (1) și (3) și rezultă, care se vor aduna

$$\begin{cases} T_1 = Mg(sin\alpha + \mu cos\alpha) \\ T_2 = Mg(sin\alpha - \mu cos\alpha) \\ T_1 + T_2 = 2Mgsin\alpha \\ sin\alpha = \frac{T_1+T_2}{2Mg} = \frac{2m+m_1+m_2}{2M}, \quad sin\alpha = \frac{2\cdot 0,1+0,1+0,02}{2\cdot 0,2} = 0,8 \end{cases}.$$

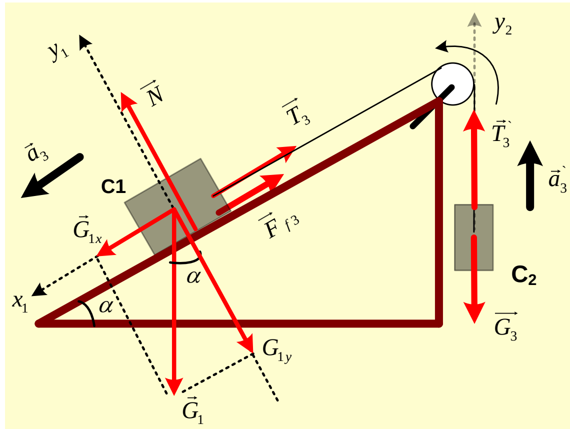
c. $\mu = ?$. Se folosesc relațiile (1) și (3), care se vor scădea, și rezultă

$$\begin{cases} T_1 = Mg(sin\alpha + \mu cos\alpha) \\ T_2 = Mg(sin\alpha - \mu cos\alpha) \\ T_1 - T_2 = 2\mu Mgcos\alpha \\ cos\alpha = \sqrt{1-sin^2\alpha} = 0,6 \\ \mu = \frac{T_1 - T_2}{2Mgcos\alpha} = \frac{m+m_1-m-m_2}{2Mgcos\alpha} = \frac{m_1-m_2}{2Mgcos\alpha} \\ \mu = \frac{0,1-0,02}{2\cdot 0,2\cdot 10\cdot 0,6} = \frac{1}{3} \approx 0,66 \end{cases}.$$

Comentariu: *În scopul simplificării calculelor numerice este foarte indicat să calculați, inițial, valorile T1 și T2, lucru foarte posibil, în acest context, încă din stadiul tratării generale a rezolvării. Apoi, cu aceste valori, faceți mult mai ușor calculele numerice pentru cerințele a., b., c. Iată cum se poate face, preluând sistemul de ecuații (1), (2), (3), (4)*

$$\begin{cases} T_1 = Mg(sin\alpha + \mu cos\alpha) \\ T_1 = (m+m_1)g, \quad T_1 = (0,1+0,1)\cdot 10 = 2N \\ T_2 = Mg(sin\alpha - \mu cos\alpha) \\ T_2 = (m+m_2)g, \quad T_2 = (0,1+0,02)\cdot 10 = 1,2N \end{cases}.$$

d. $a \equiv a_3 = ?$ Suntem în cazul 3 al problemei. Aici avem o mișcare accelerată a sistemului – corpul C_1 în jos (pe planul înclinat) și corpul C_2 în sus (pe verticală). Desenul forțelor se vede în figura alăturată. Accelerația se determină prin aplicarea principiului II similar cu cazul 2 de mai sus, dar cu masele M și respectiv m.



$$\begin{cases} Ox: \begin{cases} R_x = Ma_3 \\ R_x = G_x - T_3 - F_f \\ F_f = \mu N \end{cases} \\ Oy: \begin{cases} R_{y1} = 0 \ (conditia\ de\ sprijinire) \\ R_{y1} = N - G_y \end{cases} \end{cases}$$

$$\left\{ Oy_2: \begin{cases} R_{y2} = ma_3 \\ R_{y2} = T_3 - G_3 = T_3 - mg \end{cases} \right. .$$

Făcând înlocuiri, și o sinteză adecvată, obținem

$$\begin{cases} Ma_3 = Mg(sin\alpha - \mu cos\alpha) - T_3 \\ ma_3 = T_3 - mg \end{cases}$$

Iar de aici, îl găsim pe a_3, eliminând T_3

$$(M+m)a_3 = [M(sin\alpha - \mu cos\alpha) - m]g$$

$$a_3 = g\frac{M(sin\alpha - \mu cos\alpha) - m}{M+m} .$$

$$a_3 = 10 \cdot \frac{0,2\cdot(0,8 - \frac{1}{3}\cdot 0,6) - 0,1}{0,2+0,1} = \frac{2}{3} \approx 0,66 ms^{-2}$$

MECANICĂ - Subiectul III

În această problemă

se dau: $m = 160g = 0,16kg$, $p_0 = 3,2N\cdot s$, $\mu = 0,1$, $d_2 = 38m$, $\Delta t = 2ms = 2\cdot 10^{-3}s$

și, se cer: $a.\ E_{c0} = ?$ $b.\ d_1 = ?$ $c.\ v_2 = ?,\ d_2 = 38m$. $d.\ F_m^` = ?$

a. Se va folosi relația între energia cinetică și impuls, în mecanica clasică

$$E_{c_0} = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} .$$

Calcul numeric

$$E_{c0} = \frac{3,2^2}{2 \cdot 0,16} = 32J \ .$$

Variantă: Puteți la fel de bine, și corect, să folosiți, în prima fază, relațiile

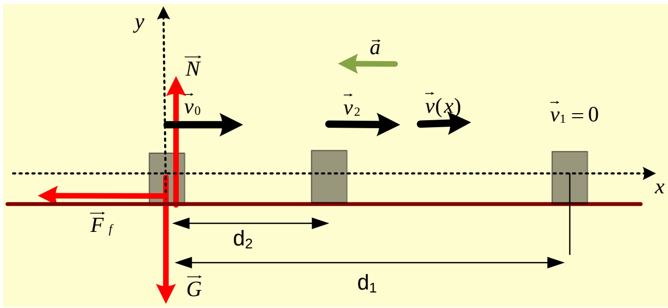
$$E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$p = p_0 = mv_0$$

de unde ddeduceți același rezultat literal, și apoi numeric.

b. Avem o mișcare rectilinie uniform încetinită, sub acțiunea forței de frecare, pe un plan orizontal, a unui corp liber.

Avem la dispoziție cel puțin trei metode de rezolvare. **În toate metodele este necesar un desen ilustrativ pentru enunțul problemei și ajutător pentru rezolvarea ei.**



Varianta 1 (varianta cea mai directă): Variația energiei cinetice

$$\Delta E_c = E_{c1} - E_{c0} = L_{fnc} = L(\vec{F}_f) = -F_f \cdot d_1 = -\mu mgd_1$$

$$v_1 = 0(oprire)$$

$$d_1 = \frac{E_{c0}}{\mu mg}$$

$$d_1 = \frac{32}{0,1 \cdot 0,16 \cdot 10} = 200m$$

Comentariu: *Pentru această variantă desenul ne ajută să evidențiem faptul că F_f este singura forță neconservativă care produce lucru mecanic nenul, să determinăm forța de frecare și, apoi, să determinîm lucrul ei mecanic (negativ).*

$$L(\vec{F}_f) = -F_f \cdot d_1$$

$$F_f = \mu N$$

$$R_y = N - G = N - mg = 0$$

$$L(\vec{F}_f) = -\mu mgd_1$$

Varianta 2: Variația energiei mecanice totale (mai familiară unor elevi). Nu dezvoltăm această metodă, deorece seamănă foarte mult cu prima. În plus apare analiza evoluției energiei potențiale gravitaționale; în problema noastră aceasta este constant zero.

Varianta 3: Aplicarea legilor mișcării rectilinii uniform variate

$$p_0 = mv_0, \quad v_0 = \frac{p_0}{m} = 20m/s$$

$$v_1 = 0(oprire), \quad v_1^2 = v_0^2 + 2aS, \quad 0 = v_0^2 - 2\mu gd_1 \ .$$

$$d_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}, \quad d_1 = \frac{20^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 10} = 200m$$

Comentariu: ***Pentru această variantă desenul ne ajută să evidențíem faptul că Ff este singura forță care acționează pe direcția mișcării, fiind o forță de rezistență. Cu ajutorul ei vom calcula accelerația de frânare a corpului lansat și apoi lăsat liber.***

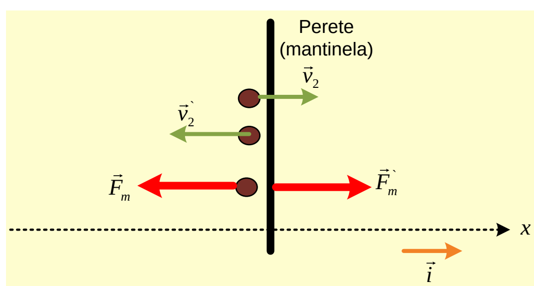
$$R_x = ma = -F_f$$
$$F_f = \mu N$$
$$R_y = N - G = N - mg = 0.$$
$$F_f = \mu mg$$
$$a = -\mu g = const < 0$$

c. Această cerință se rezolvă similar cu b. Se pot aplica metodele descrise. Deosebirea este că se schimbă unele date și cerințe. Aici, propunem varianta acoperită de programa obligatorie pentru examenul de Bacalaureat.

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c0} = L_{fnc} = L(\vec{F}_f) = -F_f \cdot d_2 = -\mu mgd_2$$
$$\frac{mv_2^2}{2} = E_{c0} - \mu mgd_2$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{m}(E_{c0} - \mu mgd_2)} = \sqrt{\frac{2}{m}E_{c0} - 2\mu gd_2}$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{0,16}\cdot 32 - 2\cdot 0,1\cdot 10\cdot 38} = 18m/s$$

d. ***Comentariu:*** ***Situația descrisă este o ciocnire elastică, cu un perete rigid (similară reflexiei la incidență normală). Între puc și perete apare o interacțiune scurtă și intensă. Apar forțe de acțiune și reacțiune, egale și de sens contrar,*** $\vec{F}_m = -\vec{F}_m^{`}$.

Forța care acționează asupra pucului produce acestuia o variație maximă a impulsului. Această forță respectă principiul II, scris cu ajutorul impulsului mecanic, vezi și desenul aferent.



$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2^{`} - \vec{p}_2 = \vec{F}_m \cdot \Delta t$$
$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t},\quad \vec{F}_m^{`} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} = +2\frac{mv_2}{\Delta t}\cdot\vec{i}$$
$$F_m = F_m^{`} = 2\frac{mv_2}{\Delta t}$$
$$F_m = F_m^{`} = 2\frac{0,16\cdot 18}{2\cdot 10^{-3}}N = 2880N = 2,88kN$$